

# PHÂN TÍCH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA MÔ HÌNH THỊ TRƯỜNG LAO ĐỘNG

Nguyễn Hữu Khánh <sup>1</sup>

## ABSTRACT

*This article studies about the stability of a model of labor market in a discrete dynamical system. The model is characterized by an one-dimensional map with a unique fixed point. We proved the existence of periodic solutions, aperiodic solutions and homoclinic orbits. Sarkovskii's theorem, period doubling bifurcation and Markov chain are used to show the existence of chaotic phenomenon in the model.*

**Keywords:** fixed point, stability, chaos

**Title:** Stability analysis of a labor market model

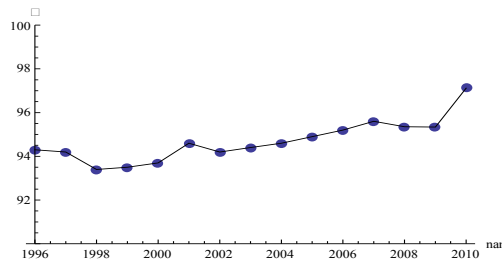
## TÓM TẮT

*Bài báo này nghiên cứu tính ổn định của một mô hình thị trường lao động trong hệ động lực rời rạc. Mô hình được đặc trưng bởi một ánh xạ một chiều với điểm bất động duy nhất. Chúng tôi chứng minh sự tồn tại của các nghiệm tuần hoàn, không tuần hoàn và quỹ đạo homoclinic. Các định lý Sarkovskii, phân nhánh chu kỳ bội và chuỗi Markov được dùng để chỉ ra sự tồn tại hiện tượng nhiễu loạn trong mô hình.*

**Từ khóa:** điểm bất động, tính ổn định, hiện tượng nhiễu loạn

## 1 GIỚI THIỆU

Trong xu thế toàn cầu hoá hiện nay, để nền kinh tế của một quốc gia được phát triển một cách bền vững thì cần phải dựa nguồn nhân lực hơn là khai thác tài nguyên thiên nhiên. Nhà quản lý phải có kế hoạch điều tiết lao động sao cho có hiệu quả nhất cho nền kinh tế. Do đó bài toán về thị trường lao động đang được nhiều nước quan tâm nghiên cứu. Nghiên cứu thị trường lao động ở Việt Nam về mặt toán học đang ở giai đoạn đầu và chưa có nhiều kết quả.



**Hình 1: Tỷ lệ phần trăm lao động ở thành thị có việc làm của Việt Nam**

Có rất nhiều bài báo khảo sát về mô hình thị trường lao động. Diamond (1982) đã xây dựng và chứng minh sự tồn tại của chu trình ổn định trong mô hình cạnh tranh lao động. Ljungqvist và Sargent [6] nghiên cứu sự thích nghi của nền kinh tế đối với thị trường lao động và tìm nghiệm của bài toán động lực phẳng. Smith (2001)

<sup>1</sup> Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

khám phá nguyên lý tối ưu trong kinh tế và phân tích trạng thái ổn định theo nguyên lý tối ưu.

Bài báo này khảo sát mô hình của thị trường lao động phát triển từ mô hình của Pissaride [9]. Mô hình được nghiên cứu dựa vào hàm khớp giữa số người tìm việc làm và số công việc được đặt hàng bởi các công ty. Động lực của mô hình được đặc trưng bởi một ánh xạ một chiều phụ thuộc bốn tham số trong hệ động lực rời rạc. Chúng tôi khảo sát tính ổn định của mô hình thông qua việc nghiên cứu sự tồn tại và ổn định của điểm bất động; các nghiệm tuần hoàn, không tuần hoàn và quỹ đạo homoclinic. Bằng các phương pháp khác nhau như sử dụng định lý Sarkovskii, phân nhánh chu kỳ bội và kết hợp hệ động lực hình thức với chuỗi Markov chúng tôi chỉ ra sự tồn tại của các hiện tượng nhiễu loạn trong mô hình. Khảo sát số cho mô hình được thực hiện thông qua các tính toán và lập trình trên phần mềm toán học Mathematica.

## 2 MÔ TẢ MÔ HÌNH

Giả sử trong mỗi khoảng thời gian có một số lượng công nhân đi vào và đi ra dòng thuê mướn: một số lượng các công việc  $v_t$  được đặt hàng bởi các công ty và một độ đo  $u_t$  số các công nhân tìm việc làm. Khi công nhân và công ty đạt đến một thỏa thuận thì có một kết nối thành công, ta gọi là khớp. Số các khớp thành công trong một khoảng thời gian cho bởi hàm khớp  $M(u_t, v_t)$ . Hàm này đòi hỏi phải tăng theo cả hai biến, lồi và thuần nhất cấp một. Theo các đặc tính trên, hàm khớp có dạng:

$$M(u_t, v_t) = A u_t^\alpha v_t^{1-\alpha},$$

trong đó  $A > 0$  và  $\alpha \in (0, 1)$ .

Độ đo mối quan hệ ràng buộc lao động cho bởi tỷ số  $\theta_t = \frac{v_t}{u_t}$ . Khi đó khả năng của

khoảng trống về việc làm được làm đầy tại thời điểm  $t$  được cho bởi

$$q(\theta_t) = \frac{M(u_t, v_t)}{v_t} = A \theta_t^{-\alpha},$$

với  $q(\theta_t) < 1$ . Tương tự, khả năng để một công nhân nhận được việc tại thời điểm  $t$  cho bởi  $\theta q(\theta) = A \theta^{1-\alpha} < 1$ .

Gọi  $n_{t+1}$  là tổng số công nhân được thuê tại thời điểm  $t + 1$  và  $s$  là xác suất một khớp được thực hiện tại thời điểm  $t$ . Ta có

$$n_{t+1} = (1 - s)n_t + M(u_t, v_t) = (1 - s)n_t + q(\theta_t)v_t.$$

Ta thấy  $(1 - s)n_t$  là số các khớp không được thực hiện tại  $t$  và kéo tới  $t + 1$ ,  $q(\theta_t)v_t$  là số các khớp mới được hình thành tại thời điểm  $t$ .

Hàm đối tượng trung tâm được cho bởi

$$U(n, v) = \phi n_t + z(1 - n_t) - c v_t,$$

trong đó  $\phi$ ,  $z$  và  $c$  là các tham số lần lượt biểu diễn năng suất của mỗi công nhân, giá trị mất đi của thời gian rỗi và giá mà công ty gánh chịu trên mỗi khoảng trống việc làm trong thị trường lao động. Do đó nhà lập kế hoạch chọn  $v_t$  mức độ thuê mướn ở chu kỳ kế tiếp  $n_{t+1}$  bằng cách giải bài toán tối ưu động lực sau:

$$\max_{v_t, n_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\phi n_t + z(1 - n_t) - cv_t]$$

với giả thiết

$$n_{t+1} = (1 - s)n_t + q \left( \frac{v_t}{1 - n_t} \right) v_t,$$

trong đó  $\beta$  là tỷ lệ thời gian khấu trừ và  $n_0$  là điều kiện ban đầu cho trước. Hàm Lagrange có dạng

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t [yn_t + z(1 - n_t) - cv_t] + \lambda \left[ (1 - s)n_t + q \left( \frac{v_t}{1 - n_t} \right) v_t - n_{t+1} \right] \right\}$$

Các điểm tới hạn thỏa các điều kiện:

$$\frac{\partial L}{\partial v_t} = -\beta^t c + \lambda_t [q'(\theta_t)\theta_t + q(\theta_t)] = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_{t+1}} = -\lambda_t + \beta^{t+1}(\phi - z) + \lambda_{t+1} [(1 - s) + q'(\theta_{t+1})\theta_{t+1}^2] = 0 \tag{2}$$

Từ điều kiện (1) ta nhận được  $\lambda_t = \frac{\beta^t c}{q'(\theta_t)\theta_t + q(\theta_t)}$ . Thay biểu thức này và  $\lambda_{t+1}$

vào điều kiện (2) ta được

$$\alpha\theta_{t+1}^\alpha - b\theta_{t+1} + d = \theta_t^\alpha, \quad \alpha \in (0,1) \tag{3}$$

với các tham số sau được định nghĩa và hạn chế

$$a = \beta(1 - s) \in (0,1), \quad b = A\alpha\beta \in (0,1), \quad \gamma = (\phi - z) / C > 0, \tag{4}$$

$$d = A(1 - \alpha)\beta\gamma > 0, \quad \theta > A^{1/\alpha}.$$

Phương trình (3) cho ta luật chuyển động của chỉ số của thị trường lao động ràng buộc trong nền kinh tế. Với điều kiện ban đầu  $\theta_0$ , phương trình (3) đặc trưng một cách đầy đủ đường dẫn của  $\theta$  và toàn bộ nền kinh tế. Động lực của mô hình có thể đặc trưng bởi ánh xạ một chiều phụ thuộc bốn tham số  $g: [0, \tilde{\theta}] \rightarrow [0, \tilde{\theta}]$ , với

$$g(\theta) = (a\theta^\alpha - b\theta + d)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{5}$$

trong đó các tham số được cho bởi (4),  $\tilde{\theta}$  được xác định ẩn như là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

$$ax^\alpha - bx + d = 0.$$

Đạo hàm của ánh xạ  $g$  cho bởi

$$g'(\theta) = (a\theta^\alpha - b\theta + d)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left( a\theta^{\alpha-1} - \frac{b}{\alpha} \right), \quad \theta \in [0, \tilde{\theta}].$$

Ta thấy  $g$  là ánh xạ một kiểu có duy nhất điểm cực đại tại  $\theta_{\max} = \left( \frac{\alpha a}{b} \right)^{1/(1-\alpha)}$ .

Ngoài ra  $g$  có điểm bất động duy nhất ở bên phải  $\theta_{\max}$  nếu  $g(\theta_{\max}) > \theta_{\max}$ .

Định lí dưới đây cho ta hạn chế xét  $A$  với điều kiện  $0 < A < 1$ .

■ **Định lí 1.** Khi  $q(\theta) < 1$  và  $\theta q(\theta) < 1$  thì  $0 < A < 1$ .

**Chứng minh.** Ta có

$$q(\theta) = A\theta^{-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \theta > \left(\frac{1}{A}\right)^{-1/\alpha} \text{ và } \theta q(\theta) = A\theta^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \theta < \left(\frac{1}{A}\right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Suy ra  $\theta \in \left( \left(\frac{1}{A}\right)^{-1/\alpha}, \left(\frac{1}{A}\right)^{1/(1-\alpha)} \right)$ . Để khoảng này tồn tại đòi hỏi

$$\left(\frac{1}{A}\right)^{-1/\alpha} < \left(\frac{1}{A}\right)^{1/(1-\alpha)} \text{ hay } 1 < \left(\frac{1}{A}\right)^{1-\alpha+\frac{1}{\alpha}}. \text{ Do đó } 0 < A < 1.$$

### 3 ĐIỂM BẤT ĐỘNG

■ **Định lí 2.** Ánh xạ  $g$  có duy nhất điểm bất động  $\theta_*$  trong  $[0, \tilde{\theta}]$ .

**Chứng minh.**

Điểm bất động  $\theta_*$  của  $g$  được xác định ẩn bởi phương trình

$$a\theta_*^\alpha - b\theta_* = \theta_*^\alpha - d.$$

Xét các hàm  $f_1(\theta) = a\theta_*^\alpha - b\theta_*$  và  $f_2(\theta) = \theta_*^\alpha - d$ . Ta thấy  $f_1(\theta)$  là hàm đơn điệu giảm đối với  $\theta$  từ  $\theta_{\max}$  đến  $+\infty$  và  $f_2(\theta)$  là hàm đơn điệu tăng đối với  $\theta$  từ 0 đến  $+\infty$ . Do đó  $f_1(\theta) = f_2(\theta)$  có nghiệm duy nhất  $\theta_*$  với  $\theta_* > \theta_{\max}$ .

■ **Định lí 3.** Điểm bất động  $\theta_*$  ổn định tiệm cận đối với động lực lùi và không ổn định đối với động lực tới.

**Chứng minh.**

Ta cần chứng minh  $-1 < g'(\theta_*) < 1$ . Vì  $\theta_* = (a\theta_*^\alpha - b\theta_* + d)^{1/\alpha}$  nên

$$\begin{aligned} g'(\theta_*) &= (a\theta_*^\alpha - b\theta_* + d)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \left( a\theta_*^{\alpha-1} - \frac{b}{\alpha} \right) = \theta_*^{1-\alpha} \left( a\theta_*^{1-\alpha} - \frac{b}{\alpha} \right) \\ &= \left( a - \frac{b}{\alpha} \theta_*^{1-\alpha} \right) = \beta(1-s) - A\beta\theta_*^{1-\alpha} = \beta(1-s-q(\theta_*)). \end{aligned}$$

Vì  $0 < \beta < 1$ ,  $0 < s < 1$  và  $0 < q(\theta) < 1$  nên ta suy ra  $-1 < g'(\theta_*) < 1$ .

### 4 NGHIỆM CỦA MÔ HÌNH

#### 4.1 Nghiệm tuần hoàn, tập hợp bất biến của nghiệm không tuần hoàn

Trong phần này, ta dùng định lí Yorke để chỉ ra sự tồn tại của nghiệm tuần hoàn và tập hấp thụ chứa các nghiệm không tuần hoàn.

■ **Định lí 4** (Yorke [5]) Cho khoảng  $I \subset \mathbb{R}$  và ánh xạ liên tục  $f : I \rightarrow I$ . Nếu tồn tại  $x^* \in I$  sao cho

$$f^3(x^*) \leq x^* < f(x^*) < f^2(x^*) \tag{6}$$

thì

i) Với mỗi  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f$  có điểm tuần hoàn chu kỳ  $k$ .

ii) Tồn tại tập hấp thụ không đếm được  $S \subset I$  chứa các điểm không tuần hoàn.

Định lí sau đây cung cấp các điều kiện đủ để ánh xạ  $g$  cho bởi (5) thỏa điều kiện của định lí 4.

■ **Định lí 5.** *Giả sử*

$$d < \theta_{\max}^\alpha \tag{7}$$

$$aG - bG^{1/\alpha} + d < \theta_{\max}^\alpha \tag{8}$$

$$(a^3 - 1)\theta_{\max}^\alpha - a^2b\theta_{\max} - abG^{1/\alpha} + d(1 + a + a^2) < b\left(a^2\theta_{\max}^\alpha - ab\theta_{\max} + (1 + a)d - bG^{1/\alpha}\right)^{1/\alpha}, \tag{9}$$

trong đó  $\theta_{\max} = \left(\frac{aa}{b}\right)^{1/(1-\alpha)}$  và  $G = a\theta_{\max}^\alpha - b\theta_{\max} + d$ .

Khi đó ánh xạ  $g$  thỏa các điều kiện của định lí 4.

**Chứng minh**

Gọi  $x^*$  là số thỏa  $g(x^*) = \theta_{\max}$  thì điều kiện (6) tương đương với điều kiện

$$g^2(\theta_{\max}) \leq x^* < \theta_{\max} < g(\theta_{\max}).$$

Trước hết, ta chứng minh phương trình  $g(x^*) = \theta_{\max}$  có nghiệm  $x^* > 0$ .

Phương trình này có thể viết lại dạng

$$a(x^*)^\alpha - bx^* = \left(\frac{aa}{b}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} - d.$$

Hàm  $h(x) = ax^\alpha - bx$  là hàm lồi và có điểm cực đại  $\theta_{\max}$ . Với điều kiện (7) ta có

$$h(\theta_{\max}) > \left(\frac{aa}{b}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} - d. \text{ Do đó tồn tại } x^* > 0.$$

Ta dễ thấy  $x^* < g(x^*) = \theta_{\max} < g^2(x^*)$ .

Điều kiện (8) cho ta  $g^2(\theta_{\max}) < \theta_{\max}$ . Suy ra  $g^3(x^*) < g(x^*) = \theta_{\max}$ .

Ta chứng minh  $g^3(x^*) \leq x^*$ . Đặt  $F(x) = ax^\alpha - bx - d - \left(\frac{aa}{b}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$ . Ta thấy  $F$  là hàm lồi, có điểm cực đại  $\theta_{\max}$  và  $F(x^*) = 0$ . Do đó  $F$  tăng nghiêm ngặt khi  $x < \theta_{\max}$ .

Điều kiện (9) cho ta  $F[g^3(x^*)] \leq 0$ . Suy ra  $g[g^3(x^*)] \leq g(x^*)$ . Vì  $g^3(x^*) < \theta_{\max}$  và  $g$  tăng nghiêm ngặt nên  $g^3(x^*) \leq x^*$ .

**4.2 Quỹ đạo homoclinic**

$\Gamma$  là quỹ đạo homoclinic đối với điểm bất động  $\theta_*$  nếu với mọi  $\theta \in \Gamma$  ta có

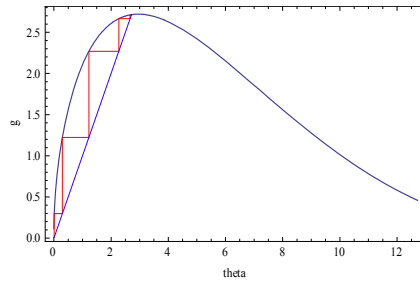
$\lim_{n \rightarrow -\infty} g^n(\theta) = \theta_*$  và  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^n(\theta) = \theta_*$ . Dựa vào định lí Mitra dưới đây, ta chứng minh sự tồn tại của quỹ đạo homoclinic trong mô hình.

■ **Định lí 6** (Mitra). *Cho hệ động lực  $(X, g)$ , ánh xạ  $g$  có điểm bất động  $\theta_*$  và điểm cực đại  $\theta_{\max}$ . Nếu  $g^3(\theta_{\max}) < \theta_*$  thì tồn tại quỹ đạo homoclinic đối với  $\theta_*$ .*

● **Mệnh đề 1.** Với  $\alpha = 0.3, A = 0.45; \beta = 0.95; s = 0.04$  và  $\gamma = 1.56$  thì điểm bất động  $\theta_*$  có quỹ đạo homoclinic.

**Chứng minh**

Với các giá trị của các tham số  $\alpha, \beta, \gamma, A$  và  $s$  ở trên, ta có  $a = 0.912, b = 0.128, d = 0.467$ . Khi đó  $\theta_{\max} = 2.952, g^3(\theta_{\max}) = 2.701$  và  $\theta_* = 2.7142$ . Ta thấy  $g^3(\theta_{\max}) < \theta_*$  nên theo định lí 6 tồn tại quỹ đạo homoclinic đối với  $\theta_*$ .



Hình 2: Quỹ đạo homoclinic đối với điểm bất động  $\theta_*$

**5 ĐỘNG LỰC NHIỀU LOẠN CỦA MÔ HÌNH**

Trong phần này ta chỉ ra sự tồn tại quá trình nhiễu loạn trong mô hình bằng nhiều phương pháp khác nhau như dùng định lí Sarkovskii, phân nhánh chu kỳ bội và chuỗi Markov.

**5.1 Dùng định lí Sarkovskii**

■ **Định lí 6** (Sarkovskii [3]). Cho  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là ánh xạ liên tục. Nếu  $f$  có điểm tuần hoàn chu kỳ 3 thì  $f$  có điểm tuần hoàn với chu kỳ bất kỳ và hiện tượng nhiễu loạn xảy ra.

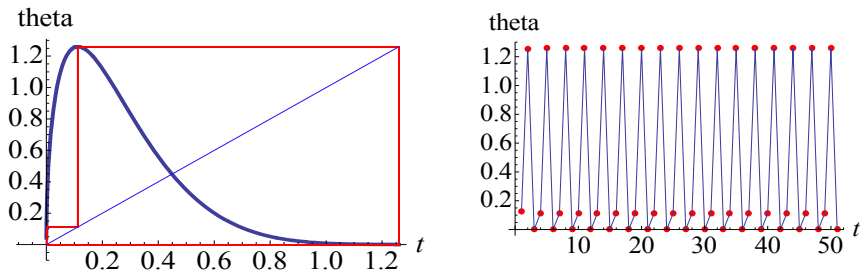
• **Mệnh đề 2.** Khi  $\alpha = 0.15564, \beta = 6.5, A = 0.936183, \gamma = 0.089248, s = 0.852021$  thì hàm  $g(\theta) = (a\theta^\alpha - b\theta + d)^{1/\alpha}$  có điểm tuần hoàn chu kỳ 3.

**Chứng minh.**

Trường hợp này ta có  $a = 0.961863, b = 0.947099, d = 0.458566, \alpha = 0.155693$ . Ánh xạ  $g$  có duy nhất điểm bất động  $\theta_* = 0.4486$  và  $g'(\theta_*) = -2.13 < 0$ . Ta thấy  $\theta_*$  là điểm bất động không ổn định đối với động lực lùi và ổn định với động lực tới. Hai vòng lặp chu kỳ 3 tìm được bằng cách giải phương trình phi tuyến  $g^3(\theta) = \theta$ , đó là

$$\{0.1122, 1.2591, 0.00018\} \text{ và } \{0.00051, 0.1624, 1.2054\}.$$

Theo định lí Sarkovskii, các vòng lặp theo các chu kỳ khác tồn tại và xảy ra hiện tượng nhiễu loạn trong mô hình.

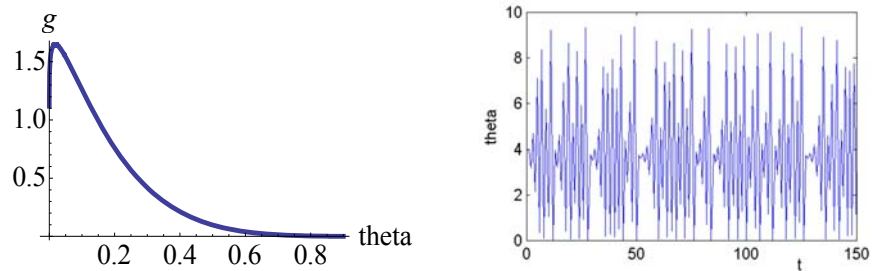


Hình 3: Đồ thị của ánh xạ g với vòng lặp chu kỳ 3 và biểu diễn độ lớn của  $\theta$  theo t

**5.2 Phân nhánh chu kỳ bội**

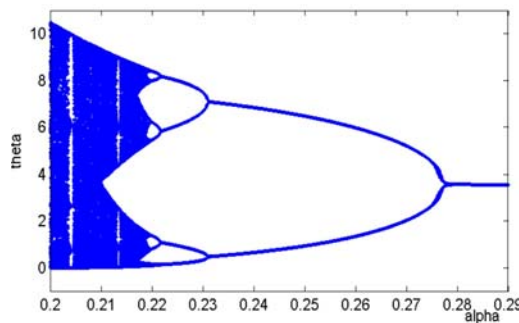
Hiện tượng nhiễu loạn trong mô hình còn được phát hiện bởi quá trình phân nhánh chu kỳ bội.

Khi  $\alpha = 0.21, \beta = 0.955, A = 0.99725, \gamma = 1.31, s = 0.1518$  ta có  $a = 0.21, b = 0.2, d = 0.9856$ . Khi đó g là ánh xạ một kiểu và chuỗi thời gian nhiễu loạn liên kết với điểm bất  $\theta_*$  được cho bởi hình dưới đây.



Hình 4: Đồ thị của ánh xạ g và biểu diễn độ lớn của  $\theta$

Ta thấy  $g'(\theta_*) = -1.8554$  nên điểm bất động  $\theta_*$  không ổn định. Động lực lùi của g thay đổi thông qua dãy phân nhánh chu kỳ bội từ việc mất tính ổn định của điểm cân bằng dẫn đến quá trình nhiễu loạn. Phân nhánh chu kỳ bội đầu tiên xảy ra khi  $\alpha = 0.2768$ , khi đó điểm bất động  $\theta_* = 3.6793$  mất tính ổn định. Thay đổi giá trị tham số  $\alpha$  trong khoảng  $[0.2, 0.3]$  ta nhận được phân nhánh chu kỳ bội. Đó là con đường dẫn đến hiện tượng nhiễu loạn. Biểu đồ phân nhánh (được tìm bằng phần mềm Mathematica) cho dưới đây. Cho giá trị bất kỳ của  $\alpha$  sau  $2^\infty$  điểm phân nhánh ta thấy xuất hiện động lực nhiễu loạn.



Hình 5: Biểu đồ phân nhánh khi  $\alpha$  thay đổi

### 5.2 Chuỗi Markov

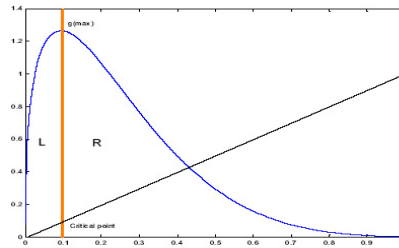
Trong phần này, chúng tôi dùng hệ động lực hình thức kết hợp với chuỗi Markov để chỉ ra sự tồn tại quá trình nhiễu loạn trong mô hình. Đây là phương pháp sử dụng trong trường hợp không thể dùng định lý Sarkovsii hoặc phân nhánh chu kỳ bội.

Xét ánh xạ một kiểu  $g: [0, \tilde{\theta}] \rightarrow [0, \tilde{\theta}]$  cho bởi (5).

Một đường dẫn bất kỳ  $\theta = \theta_{\max} \theta_1 \theta_2 \dots$  cho ánh xạ  $g$  tương ứng với dãy kí hiệu  $s_0 s_1 s_2 \dots$  trong đó  $s_i \in \{L, C, R\}$  phụ thuộc vào nơi mà  $\theta_i$  rơi vào, tức là

$$s_i(\theta) = \begin{cases} L & \text{khi } g^i(\theta) < \theta_{\max} \\ C & \text{khi } g^i(\theta) = \theta_{\max} \\ R & \text{khi } g^i(\theta) > \theta_{\max} \end{cases}$$

Tất cả dãy kí hiệu được tạo nên bởi các chữ được sắp bởi thứ tự  $L < C < R$ .



Hình 6: Phân hoạch của ánh xạ một kiểu  $g$

Ta định nghĩa

$$\Sigma_2 = \{s = s_0 s_1 s_2 \dots \mid s_i \in \{L, R\}\}$$

là tập tất cả các dãy kí hiệu vô hạn có thể của các chữ  $L, R$ . Ánh xạ dời  $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  được xác định bởi  $\sigma(s) = \sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ . Ta chú ý rằng không phải tất cả dãy kí hiệu tương ứng với đường dẫn của một điều kiện ban đầu  $\theta_0$ . Hạn chế ánh xạ dời lên một tập con của  $\Sigma_2$  bao gồm tất cả các hành trình là một tập con  $\Sigma$  của  $\Sigma_2$ .

Một lớp đặc biệt các phép dời con của loại hữu hạn trong đó sự chuyển đổi của dãy kí hiệu được đặc biệt hoá bởi một ma trận nhị phân cấp  $(n \times n)$  của số 0 và 1:

$$M = (M_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}, M_{ij} \in \{0,1\}.$$

$M$  sinh ra một tập dời con

$$\Sigma_M = \{s \in \Sigma_2 : M_{s_i s_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Tương ứng này được gọi là chuỗi Markov tôpô liên kết với ma trận Markov. Ta nói  $M_{s_i s_{i+1}} = 1$  nếu có thể chuyển từ  $s_i$  đến  $s_{i+1}$ . Ma trận  $M$  cho ta sự diễn tả đầy đủ của động lực của ánh xạ một kiểu.

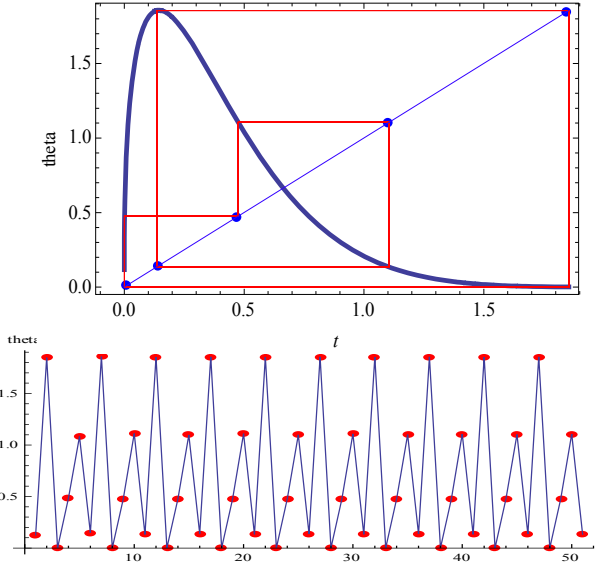
Tính bất biến của hệ được thể hiện bởi entropy tôpô của hệ, xác định bởi

$$h_{top}(\Sigma_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#W_n(\Sigma_M))}{n}$$



trong đó  $\#W_n(\Sigma_M)$  là số của những chữ có độ dài  $n$  trong tập  $W_n(\Sigma_M)$  các chữ có độ dài  $n$  xảy ra trong  $\Sigma_M$ . Entropy tôpô đo tốc độ phát triển của số các quỹ đạo có độ dài  $n$ .

Cho các tham số  $a = 0.75, b = 0.58, d = 0.62, \alpha = 0.15$ , ta tìm được một quỹ đạo chu kỳ 5  $\{1.8549, 0.0013, 0.4756, 1.1047, 0.1350\}$  được cho bởi hình dưới đây với 4 khoảng phân hoạch Markov  $\{I_i\}_{i=1,\dots,4}$ .



**Hình 7: Phân hoạch Markov cho quỹ đạo chu kỳ 5 và biểu diễn độ lớn của  $\theta$  theo  $t$**

Điểm tới hạn  $\theta_{\max} = 0.1452$  sinh ra sự phân hoạch cho ánh xạ  $g$ . Quỹ đạo tuần hoàn có kí hiệu  $(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5)^\infty = (RLRRC)^\infty$ . Đối với dãy này ta có ma trận Markov

$$M_{RLRRC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M$  có các giá trị riêng:

$$\lambda_1 = 1.5128, \lambda_2 = 0.3329 + 0.6707i, \lambda_3 = 0.3329 - 0.6707i, \lambda_4 = -1.1787$$

Giá trị riêng lớn nhất là  $\lambda_1 = 1.5128$ . Ta suy ra entropy tôpô  $h_{\text{top}} = \ln(\lambda_1) \simeq 0.4139 > 0$ . Điều này cho thấy chuyển động nhiễu loạn xảy ra trong tập hợp các giá trị tham số.

## 6 KẾT LUẬN

Các kết quả phân tích trong bài báo cho thấy mô hình thị trường lao động được nghiên cứu thể hiện động lực phức tạp bao gồm các trạng thái tuần hoàn, không tuần hoàn và hiện tượng nhiễu loạn. Quá trình nhiễu loạn được phát hiện thông qua

việc sử dụng định lý Sarkovskii, phân nhánh chu kỳ bội và động lực kí hiệu kết hợp với chuỗi Markov. Mô hình trên có thể áp dụng vào thực tế để nhận biết tính ổn định lâu dài của thị trường lao động. Khi các tham số thoả các điều kiện của các định lý 5 và 6 thì thị trường ổn định; các dấu hiệu ở các mục 5.1, 5.2 và 5.3 cho ta biết thị trường không ổn định.

Do ánh xạ một chiều đặc trưng cho mô hình phụ thuộc vào bốn tham số nên chưa thể đưa ra biểu đồ phân nhánh toàn cục trong không gian các tham số. Đây là bài toán mở mà tác giả cần nghiên cứu thêm.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Andalfatto D. (1996). Business cycles and labor market search, American Economic Review **86** (1), 112-132.
- [2] Bhattacharya J., Bunzel H. (2003). Economics Bullentin **5** (19), 1 - 10.
- [3] Devaney R. L. (1986). *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, NewYork.
- [4] Garibaldi P., Wasmer E. (2001). Labour market flows and equilibrium search unemployment. Institute for the study of labor, Born, Discussion Paper No. 406.
- [5] Li T.Y., Yorke J. A. (1975). *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82**, 985 - 992.
- [6] Ljungqvist L., Sargent T. (2001) Recursive macroeconomic theory. MIT Press, Cambridge Massachusetts.
- [7] Mendes D.A., Ramos J.S. (2008). Stability analysis of an implicitly defined labor market model, Physica A **387**, 3921 - 3930.
- [8] Mitra T. (2001). A sufficient condition for topological chaos with an application to a model of endogenous growth, J. Economic Theory, **96** (1), 133-152.
- [9] Pissaride C.A. (1990). Equilibrium unemployment cycles, Basil Blackwell, Cambridge.