

# SỰ CHUYỂN ĐỔI SỰ PHẠM TRONG DẠY HỌC KHÁI NIỆM SỐ TỰ NHIÊN Ở BẬC TIỂU HỌC

Dương Hữu Tông<sup>1</sup>

## ABSTRACT

*Teaching mathematics has to pay attention to reasearching on mathematical historical elements and cognitive levels of pupils. However, today mathematical objects, which are instrouced into curriculums and textbooks, apart from its derivative and developed periods in history. This reason implies that the guidance for pupils to know mathematical objects is limited. Therefore, researching on the didactical transposition in teaching mathematics will bring the pedagogical meanings to both teachers and learners. This article will show one of these meanings by operating research on the didactical transposition about natural numbers in primary schools.*

**Keywords:** *didactical transposition, mathematical objects, mathematical history, natural numbers*

**Title:** *Didactical transposition in teaching concepts of natural numbers in primary schools*

## TÓM TẮT

*Việc giảng dạy toán học phải tính đến những nghiên cứu yếu tố lịch sử toán và trình độ nhận thức của học sinh. Tuy nhiên, hiện nay đối tượng toán học được đưa vào chương trình vào sách giáo khoa (SGK) lại tách rời khỏi giai đoạn nảy sinh và phát triển của nó trong lịch sử. Điều này đã dẫn đến việc hướng dẫn cho học sinh tìm hiểu đối tượng toán học bị hạn chế. Do đó, nghiên cứu sự chuyển đổi sự phạm trong dạy học toán sẽ mang lại ý nghĩa sự phạm cho người dạy lẫn người học. Bài báo này nhằm chỉ ra một trong các ý nghĩa đó thông qua tiến hành nghiên cứu sự chuyển đổi sự phạm trong dạy học khái niệm số tự nhiên ở bậc tiểu học.*

**Từ khóa:** *Sự chuyển đổi sự phạm, đối tượng toán học, lịch sử toán, khái niệm số tự nhiên*

## 1 ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong môn Toán ở nhà trường tiểu học, khái niệm số tự nhiên được GV truyền thụ từ những gì SGK, sách giáo viên (SGV) ghi chép mà không nhắc đến đối tượng này xuất hiện như thế nào hay có ý nghĩa gì trong lịch sử hình thành của nó. Chẳng hạn, khái niệm số tự nhiên được GV dạy là 1, 2, 3, 4,... mà không được đề cập đến các số này nó ra đời nhằm mục đích gì hay vai trò, ý nghĩa của nó ra sao? Việc dạy học như thế đôi khi làm mất đi nghĩa thật sự của đối tượng toán học hay thiếu vắng đi một nghĩa nào đó đã tồn tại trong lịch sử của nó. Như vậy, nghiên cứu sự chuyển đổi sự phạm trong dạy học khái niệm số tự nhiên cho phép làm sáng tỏ khái niệm này ở các cấp độ tri thức khác nhau: tri thức bác học, tri thức cần giảng dạy, tri thức soạn giảng, tri thức được dạy. Tuy nhiên, chúng tôi chỉ trình bày ở

<sup>1</sup> Khoa Sư phạm

đây sự chuyên đổi sự phạm khái niệm số tự nhiên với hai cấp độ: tri thức bác học và tri thức cần giảng dạy.

## 2 SỰ CHUYÊN ĐỔI SỰ PHẠM TRONG DẠY HỌC KHÁI NIỆM SỐ TỰ NHIÊN Ở BẬC TIỂU HỌC

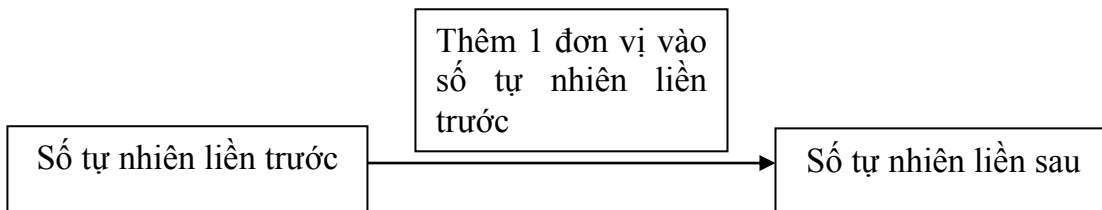
### 2.1 Số tự nhiên ở cấp độ Tri thức bác học

#### 2.1.1 Cách tiếp cận dựa trên đo lường

Trong cách tiếp cận dựa trên đo lường, số tự nhiên có liên quan rất nhiều đến số lượng các vật thể của một toàn thể và số các đơn vị đo lường. Người Hy Lạp xem số như là đo lường mọi thứ. Họ đồng nhất đo lường với đếm. Khi đó, số tự nhiên lấy nghĩa như là “*kết quả của phép đếm*”. Đây cũng là giai đoạn dẫn đến hình thành khái niệm số tự nhiên. Để hiểu được số tự nhiên hình thành như thế nào, ta hãy hình dung con người nhận thức được số lượng sự vật bằng cách nào? Người nguyên thủy có thể phân biệt trong tự nhiên giữa một cái cây và một rừng cây, giữa một con chó sói và một bầy chó sói,...nghĩa là phân biệt giữa *nhiều hơn và ít hơn*. Có thể nói, con người nhận thức được số lượng sự vật bằng cách so sánh. Để nhận biết được số lượng của một tập hợp các “vật” nào đó, ta so sánh nó với một tập hợp mà ta đã biết rõ số lượng. Tập hợp này được gọi là *tập hợp chuẩn*. Để so sánh ta cho tương ứng mỗi vật của tập hợp đang xét với một vật xác định của tập hợp chuẩn, sao cho hai vật khác nhau được ứng với hai vật phân biệt của tập hợp chuẩn. Để hình dung rằng khi lập tương ứng như vậy, mỗi phần tử của tập hợp chuẩn và ngược lại (tương ứng như vậy gọi là tương ứng 1-1 hay là một song ánh) thì ta coi rằng hai tập hợp có số lượng bằng nhau, hay theo thuật ngữ toán học gọi là hai tập hợp có cùng lực lượng. Dần dần người ta đi đến đặt ra các con số để chỉ đặc điểm chung của các tập hợp có cùng lực lượng.

#### 2.1.2 Cách tiếp cận quan hệ thứ tự

Định nghĩa về số theo quan hệ thứ tự lại thuộc về hai nhà toán học: Dedekind và Peano. Dedekind (1887) đồng nhất số tự nhiên với số thứ tự: “*Những phần tử này được gọi là số tự nhiên hay số thứ tự hay đơn giản là số*”. Nguyên nhân số chỉ phụ thuộc duy nhất vào các tính chất thứ tự của số tự nhiên dẫn ông đến kết luận rằng số thứ tự cơ bản hơn bản số. Đây là một điều quan trọng về lý thuyết của Dedekind. Ông đề nghị rằng các số tự nhiên là gì đi nữa, trước tiên chúng phải là một cấp số. Peano tiếp cận số tự nhiên theo phương pháp tiên đề. Theo phương pháp tiên đề như trên, các số tự nhiên có thể được định nghĩa dựa vào số liền trước nó. Ở đây, số 1 đóng vai trò khái niệm cơ bản nên không được định nghĩa. Số 0 không được Peano chọn làm khái niệm cơ bản trong các hệ tiên đề ông đưa ra. Do đó, các số tự nhiên (ngoại trừ số 0) có thể được tiếp cận theo tiến trình sau:



Tóm lại, cách tiếp cận quan hệ thứ tự đồng nhất số tự nhiên với số thứ tự. Khi đó, số tự nhiên lấy nghĩa “*vị trí của các số hạng trong một cấp số*”.

### 2.1.3 Cách tiếp cận bản số

Người đầu tiên tiếp cận số tự nhiên theo lối này chính là nhà toán học Cantor. Nếu  $a$  là số tự nhiên thì tồn tại một tập hữu hạn  $A$ , sao cho  $a = \text{Card}A$ . Dưới định nghĩa này, số tự nhiên lấy nghĩa “*bản số của tập hợp*”. Tuy nhiên, để biết hai tập hợp cùng số phần tử, cần đến một quan hệ thể hiện mỗi phần tử của tập này tương ứng một và chỉ một với một phần tử của tập còn lại. Khi đó, số tự nhiên còn lấy nghĩa “*biểu thị tương ứng 1-1 giữa các tập hợp*”.

### 2.1.4 Cách tiếp cận theo “lớp”

Cách tiếp cận này do hai nhà toán học Frege và Russell đề xuất. Xét về lịch sử, bản dịch của Frege có được sự ưu tiên hơn của Russell. Bản dịch này xuất hiện trong quyển “*Die Grundlagen der Arithmetik*” (Nền tảng của số học). Có một số điểm khác nhau giữa lý thuyết của Frege và Russell. Frege thích định nghĩa lớp dựa vào nội hàm của nó. Tuy nhiên, Russell làm theo định nghĩa thông thường hơn, đó là lớp liên quan đến hàm mệnh đề một ẩn. Định nghĩa này làm cho lớp đồng nghĩa với ngoại diên của nó. Ngoài ra, Frege sử dụng một định nghĩa thuộc về tập hợp hơi mơ hồ hơn định nghĩa như là một loại hàm mệnh đề hai ẩn nào đó. Cả hai bản dịch đều thống nhất trên 3 điểm chính: Đầu tiên, quan điểm của số tự nhiên xuất phát từ quan điểm nhiều bằng nhau hơn là quan điểm thứ tự. Thứ hai, số tự nhiên đồng nhất với bản số. Thứ ba, mỗi số tự nhiên được xem như là một loại lớp nào đó.

Mỗi số tự nhiên được định nghĩa như là lớp của tất cả các tập hợp có cùng số phần tử. Một nghĩa khác của số tự nhiên có thể phát biểu như sau: “*biểu thị lớp các tập hợp tương đương*”.

### 2.1.5 Cách tiếp cận bản số - thứ tự

Cách tiếp cận này được nhà tâm lý học Piaget đưa ra trong tác phẩm “*La genèse du nombre chez l'enfant*” (Sự phát triển số của trẻ). Cách tiếp cận của ông dựa trên nền tảng logic. Luận điểm chính của ông là kết hợp cả hai quan điểm về số: quan hệ thứ tự và lớp. Ông tranh luận: thật là không chính xác nếu xây dựng số tự nhiên chỉ dựa vào một trong hai số thứ tự hay bản số. Thay vì vậy, số tự nhiên có thể đồng nhất cả hai: thứ tự và bản số.

Một số điều rút ra từ quan điểm của Piaget. Đầu tiên, ông giả định Russell đúng khi ông cho số tự nhiên đồng nhất với bản số. Có các nguyên nhân để nghi ngờ rằng sự kết nối giữa số và tính chất cùng số lượng của các lớp riêng biệt như lý thuyết của Frege và Russell. Piaget không ủng hộ các tranh luận này. Thứ hai, mặc dù khái niệm số được suy ra từ khái niệm số giữa các lớp, nhưng điều đó không phải là tất cả những gì nó có liên quan. Thứ ba, ngoài tương ứng ra, cũng nên giới thiệu thứ tự như là khái niệm cơ bản trong lý thuyết. Điều này sẽ cho mỗi số hạng trong lớp bất kỳ là số thứ tự. Bằng cách phát hiện ra quy luật là: mỗi cặp số hạng của các lớp khác nhau phải có cùng số thứ tự. Chúng ta chắc chắn rằng, với hai lớp có cùng số phần tử đã cho, mỗi số hạng trong lớp này sẽ được ghép đôi một và chỉ

một số hạng trong lớp còn lại và ngược lại. Khi đó, số tự nhiên sẽ lấy nghĩa của hai cách tiếp cận kia.

**2.2 Số tự nhiên ở cấp độ Tri thức cần giảng dạy**

*2.2.1 Số tự nhiên trong chương trình đào tạo GV tiểu học*

**\* Số tự nhiên trong giáo trình của Bùi Anh Kiệt**

Giáo trình này trình bày số tự nhiên theo phương pháp tiên đề của Peano như đã được trình bày trong chương 1. Khi đó, số tự nhiên được nghiên cứu gắn liền với *đặc trưng của nó là tự số* (tính sắp thứ tự tốt của dãy số tự nhiên). Hơn thế nữa, mỗi số tự nhiên được định nghĩa trên cơ sở cộng thêm 1 với phần tử trước nó dưới ngôn ngữ số kè sau (trừ số 0). Chính vì thế, nó sẽ lấy nghĩa của cách tiếp cận thứ tự: *Số tự nhiên chỉ vị trí của số hạng trong một cấp số.*

**\* Số tự nhiên trong giáo trình của Trần Diên Hiền**

Số tự nhiên được định nghĩa thông qua bản số của tập hữu hạn. Điều đáng lưu ý ở đây là tác giả không đưa ra định nghĩa bản số tường minh. Nó chỉ được đề cập thông qua định nghĩa hai tập hợp tương đương. Nó chỉ là đối tượng để biểu thị cho sự tương đương giữa các tập hợp.

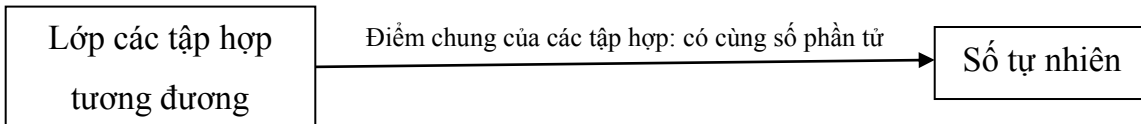
Tuy nhiên, trong giáo trình *Lý thuyết tập hợp* của tác giả Nguyễn Thanh Sơn (1999) (trang 89) đưa ra định nghĩa khái niệm bản số một cách tường minh như sau:

“Lượng số là lớp tất cả tập hợp có ánh xạ 1-1 trên với nhau” (Lượng số là bản số).

- Khi đó, khái niệm bản số được đề cập một cách tường minh. Với định nghĩa lượng số của tác giả Nguyễn Thanh Sơn, khái niệm số tự nhiên theo lớp và tương ứng 1-1 được làm rõ hơn, tường minh hơn. Hơn thế nữa, số tự nhiên lấy nghĩa “biểu thị lớp các tập hợp tương đương”.

**\* Số tự nhiên trong giáo trình của Phạm Đình Thực**

Tác giả ngầm hình thành khái niệm số tự nhiên thông qua khái niệm bản số (hay khái niệm số tự nhiên được đồng nhất với bản số).

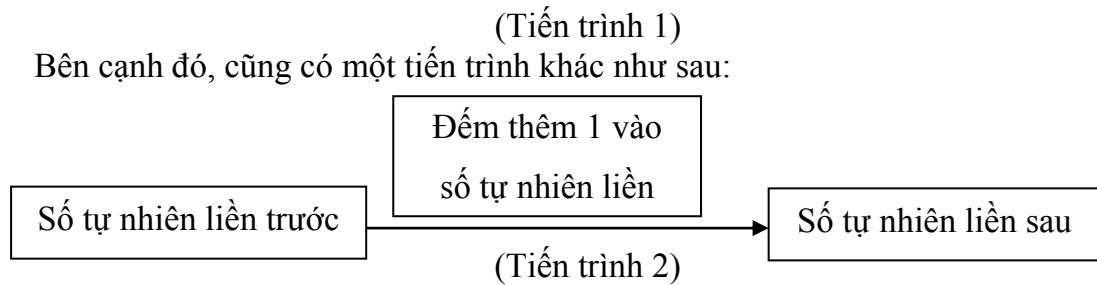


Qua tiến trình trên, số tự nhiên lấy nghĩa “*biểu thị lớp các tập hợp tương đương*”.

**\* Số tự nhiên theo giáo trình của Đỗ Trung Hiệu – Đỗ Đình Hoan**

Điểm nhấn trong giáo trình này là tác giả đưa ra hai con đường tiếp cận số tự nhiên. Đầu tiên, trên cơ sở của hoạt động đếm các mẫu vật khác nhau. Các mẫu vật này có thể khác nhau về hình dáng, chất lượng, màu sắc, kích thước,... nhưng đặc điểm chung của các mẫu vật này là có cùng số lượng. Đây cũng là tình huống xuất hiện của số tự nhiên. Thông qua hoạt động đếm các mẫu vật như thế sẽ hình thành tương ứng 1-1 giữa các phần tử của các tập hợp. Với cách tiếp cận này, số tự nhiên lấy nghĩa là “*biểu thị tương ứng 1-1 giữa các tập hợp*”. Cách tiếp cận thứ hai của tài liệu là hình thành số tự nhiên trên cơ sở thêm 1 vào số liền trước. Điều đó được thể hiện qua đoạn trích sau: “*Trong vòng 10 thì việc đếm thêm 1 là hoạt động chủ*

yếu để giới thiệu số mới (lần lượt từ bé đến lớn, theo ý nghĩa “số liền sau”, ngoại trừ số 0)”. Đây chính là sự thể hiện của tư tưởng số kế sau được đưa ra trong hệ tiên đề của Peano có trong giáo trình của tác giả Bùi Anh Kiệt. Khi đó, số tự nhiên sẽ lấy nghĩa “*chỉ vị trí của số hạng trong một cấp số*”. Tuy nhiên, cả hai nghĩa này đều không được trình bày một cách tường minh. Có một sự ngoại lệ như sau. Số 0 không được trình bày theo hai cách tiếp cận trên. Số không được hình thành trên cơ sở bản số của tập hợp rỗng. Điều đó giống với giáo trình của Phạm Đình Thực. Qua đây, có thể phác họa lại tiến trình đưa vào số tự nhiên như sau:

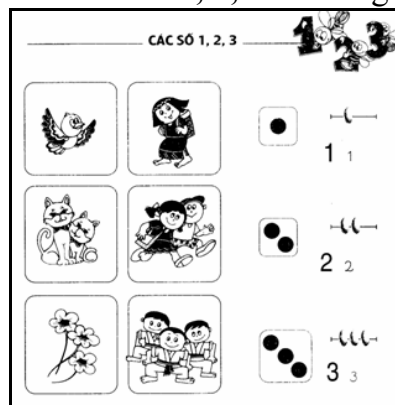


- Tiến trình 1 chỉ khác với tiến trình được trình bày trong giáo trình của tác giả Phạm Đình Thực là xuất phát từ phép đếm khác với hình thành lớp các tập hợp tương đương. Do đó, tiến trình 1 này thể hiện được tư tưởng đi thiết lập tương ứng 1-1. Bởi lẽ, phép đếm là đi thiết lập tương ứng 1-1. Tiến trình 2 ở trên hoàn toàn vắng mặt trong giáo trình của tác giả Phạm Đình Thực. Tiến trình 2 này cũng được nhắc đến trong phương pháp tiên đề của Peano. Tuy nhiên, tiến trình 2 này không thể áp dụng cho số 0 bởi vì nó không có số tự nhiên nào liền trước, nên tác giả Đỗ Trung Hiệu chọn cách khác để hình thành số 0. Nó hình thành từ bản số của các tập hợp rỗng. Điều này cũng phù hợp với cách tiếp cận của số 0 trong lịch sử.
- Trong tiến trình 2, số tự nhiên gắn liền với đặc trưng tự số. Điều đó được thể hiện một cách tường minh. Đặc trưng bản số được hiểu một cách ngầm ẩn.

### 2.2.2 Số tự nhiên trong SGK Toán ở bậc tiểu học

#### \* Cách tiếp cận các số tự nhiên từ 1 đến 5

Trong tiến trình so sánh số phần tử của các tập hợp, các tập hợp có số phần tử bằng nhau sẽ dẫn đến hình thành số tự nhiên. Đó là phân trình bày tiếp theo của SGK. Sau đây là nội dung trong bài “**CÁC SỐ 1, 2, 3**” ở trang 11, SGK:

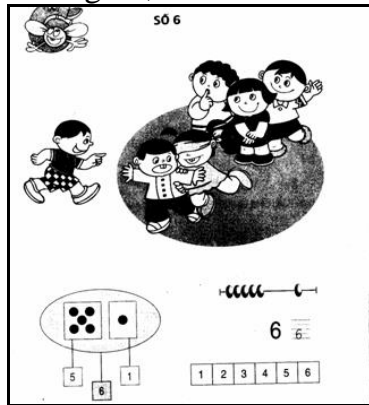


Nhìn vào hình vẽ, ở dòng thứ nhất, tác giả chỉ ra các tập hợp có cùng số phần tử là một. Đầu tiên có thể là một con chim, một học sinh nữ, một chấm tròn và sau cùng là một con tính trên bàn tính. Tất cả cho thấy các tập hợp này có cùng số phần tử là một. Tương tự như thế cho cách hình thành các số 2 và 3.

Trong bài học này, SGK chọn cách tiếp cận cho các số 1, 2, 3 là xuất phát từ việc hình thành các tập hợp có cùng số phần tử, dần dần hình thành số tự nhiên ứng với số phần tử của các tập hợp. Với cách tiếp cận của SGK, số tự nhiên lấy nghĩa “*chỉ số phần tử của tập hợp*”. Nghĩa “*biểu thị lớp các tập hợp tương đương*” dường như bị lu mờ để nhường chỗ cho hai nghĩa khác của số tự nhiên là “*chỉ số phần tử của tập hợp*” và “*kết quả của phép đếm*”. Các bài tập cho thấy số tự nhiên chỉ liên hệ đến hai nghĩa sau. Hầu như các kiểu nhiệm vụ đều không đặc trưng cho nghĩa “*biểu thị lớp các tập hợp tương đương*”.

**\* Cách tiếp cận các số tự nhiên từ 6 đến 10**

Các số từ 1 đến 5 được hình thành trên cơ sở lớp các tập hợp tương đương. Vậy các số 6, 7, 8, 9, 10 được tiếp cận như thế nào? Để tìm câu trả lời cho câu hỏi này, chúng tôi phân tích bài “**SỐ 6**” trang 26, SGK:



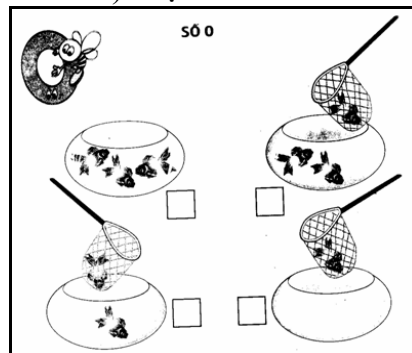
Trong các cách tiếp cận số tự nhiên được nhắc trong giáo trình của tác giả Đỗ Trung Hiệu, SGK trình bày cách tiếp cận sau cùng cho số 6. SGK hình thành số 6 dựa trên hệ tiên đề Peano theo quan hệ số liền sau bằng con đường đếm thêm 1 vào số 5. Trong tranh vẽ là năm bạn nhỏ đang chơi, có một em nhỏ đang đi đến hay năm chấm tròn thêm một chấm tròn... Tất cả đều thể hiện được tư tưởng 5 đơn vị thêm một đơn vị. Đó là cách tiếp cận theo quan điểm thứ tự. Nếu ở các số 1, 2, 3, 4, 5 cách tiếp cận thứ tự chỉ là ngầm ẩn, cách tiếp cận thứ tự ở đây là tường minh. Khi đó, số tự nhiên sẽ lấy nghĩa là “*chỉ vị trí của số hạng trong một cấp số*”. Nhưng nghĩa này không được các tác giả đề cập tường minh. Nó thật sự chỉ được đề cập trong lịch sử số tự nhiên mà không được chú ý trong cả hai thể chế đào tạo giáo viên và học sinh. SGK đề cập tường minh đặc trưng tự số của số tự nhiên giống như trong giáo trình Số học của Bùi Anh Kiệt. Đặc trưng tự số này được thể hiện qua các con tính trên bàn tính. Hơn thế nữa, cách tiếp cận này cũng cho thấy được cấu tạo của số 6 là gồm 5 đơn vị và 1 đơn vị. Đây là cũng cơ sở ban đầu cho hình thành phép cộng hai số tự nhiên 5 và 1.

Tương tự như thế, các số tự nhiên 7, 8, 9, 10 được hình thành bằng cách thêm một đơn vị vào số liền trước nó. Đó chính là cách tiếp cận thứ tự chung cho các số 6, 7, 8, 9, 10. Tiến trình hình thành các số tự nhiên này trùng khớp với tiến trình 2 được

đưa ra trong giáo trình Phương pháp giảng dạy Toán của tác giả Đỗ Trung Hiệu – Đỗ Đình Hoan. Các cách tiếp cận của các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 đã được trình bày. Vậy số 0 được SGK tiếp cận theo quan điểm nào?

**\* Cách tiếp cận số 0**

Số 0 được dạy sau các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Nó không được trình bày theo quan điểm hệ tiên đề Peano mà theo quan điểm lịch sử phát triển của số tự nhiên. Còn xét về bản chất toán học, số 0 hình thành như bản số của tập hợp rỗng. Xuất phát từ một nhóm các phần tử lấy ra làm cho số lượng các phần tử trong nhóm giảm dần, tới khi không còn phần tử nào. Ta nói trong nhóm không có phần tử nào (số lượng phần tử trong nhóm là 0). Cụ thể ở bài “Số 0” SGK (trang 34) như sau:



Các vấn đề về khái niệm số tự nhiên được trình bày khá đầy đủ. SGK không định nghĩa trực tiếp khái niệm số tự nhiên mà chỉ chọn ra một số cách tiếp cận cho từng số tự nhiên cụ thể. Các cách tiếp cận số tự nhiên được đưa ra khá phong phú. Có lúc thì tiếp cận theo quan điểm quan hệ thứ tự. Cũng có lúc, tiếp cận trên quan điểm bản số. Ngoài ra, số 0 cũng có cách tiếp cận riêng của mình. SGK đưa ra số 0 là bản số của tập hợp rỗng.

**3 KẾT LUẬN**

Nghiên cứu sự chuyển đổi sự phạm trong dạy học toán cho thấy được sự khác nhau giữa các cấp độ tri thức. Nhờ đó mà GV có nhiều lựa chọn trong việc thiết kế các tình huống giảng dạy. Cụ thể, trong trường hợp dạy số tự nhiên như trên thì nghĩa “*biểu thị lớp các tập hợp tương đương*” đã bị mất đi khi ở cấp độ tri thức cần giảng dạy ở bậc tiểu học. Do đó, GV có thể chọn ra các tình huống dạy học để tạo điều kiện cho học sinh tiếp cận số tự nhiên với nghĩa trên.

Tóm lại, nghiên cứu chuyển đổi sự phạm trong dạy học toán là rất cần thiết. Bởi lẽ, nó sẽ giúp giáo viên hiểu rõ hơn về vấn đề toán học trong lịch sử và có thể góp phần nâng cao hiệu quả giảng dạy toán của mình.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

Chương trình tiểu học (Bộ giáo dục và đào tạo) (2001, 2006), NXB Giáo dục.  
 Chương trình đào tạo giáo viên tiểu học (Đại học Cần Thơ) (2003).  
 Trần Diên Hiền, Nguyễn Tiến Tài, Nguyễn Văn Ngọc (2001), *Giáo trình Lý Thuyết Số*, NXB Giáo dục.  
 Đỗ Trung Hiệu, Đỗ Đình Hoan, Vũ Dương Thụy, Vũ Quốc Chung (2004), *Giáo trình Phương pháp dạy học môn Toán ở Tiểu học*, NXB ĐHSP.

- Đỗ Đình Hoan (2006), *Toán 1*, NXB Giáo dục, (SGK hiện hành).
- Đỗ Đình Hoan (2006), *Toán 1*, NXB Giáo dục, (SGV hiện hành).
- Bùi Anh Kiệt (2007), *Bài giảng Số Học*, Bộ môn Toán, Đại học Cần Thơ.
- Nguyễn Phú Lộc (2008), *Lịch sử toán học*, NXB Giáo dục.
- Nguyễn Thanh Sơn (1999), *Lý thuyết tập hợp*, Trường Đại học Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh.
- Phạm Đình Thực (2003), *Phương pháp dạy học Toán bậc Tiểu học*, NXB ĐHSP.
- Charles J. Brainerd (1979), *The origins of the number concept*, Praeger Publishers.
- Di Leonardo M.V., Marino T., Spagnolo F. (1996), *The “0” is it an obstacle?*, Palermo University.