SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BAO HÀM TỰA BIẾN PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Lâm Quốc Anh[1] *và Phan Đại Nhơn*[2]

ABSTRACT

We consider quasivariational inclusion problem in topological vector spaces. Sufficient conditions for the solution existence are established. Applications to somes special cases of quasivariational inclusion such as Ky Fan inequality, variational inequality and optimization problem.

Keywords: ***Quasivariational inclusion problems, Ky Fan inequality, variational inequality, optimization problem***

Title: Existence of solutions to quasivariational inclusion problem and applications

TÓM TẮT

Chúng tôi xét bài toán bao hàm tựa biến phân trong không gian vectơ tôpô. Thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm. Áp dụng vào một số trường hợp đặc biệt của bài toán bao hàm tựa biến phân như, bất đẳng thức Ky Fan, bất đẳng thức biến phân và bài toán tối ưu.

Từ khóa: ***Bài toán bao hàm tựa biến phân, bất đẳng thức Ky Fan, bất đẳng thức biến phân, bài toán tối ưu***

1 MỞ ĐẦU

Cho X là không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, $A \subseteq X$ là tập hợp con lồi, đóng khác rỗng của X, và Y là không gian vectơ tôpô. Xét các ánh xạ đa trị $S_1 : A \to 2^A$, $S_2 : A \to 2^A$ có giá trị khác rỗng, và $F : A \times A \to 2^Y$. Ta xét bài toán bao hàm tựa biến phân sau:

$(QVIP)$: Tìm $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$ sao cho,

$$0 \in F(\bar{x}, y), \text{ với mọi } y \in S_2(\bar{x}).$$

Bài toán bao hàm tựa biến phân là dạng tổng quát của nhiều bài toán quan trọng trong lý thuyết tối ưu, sau đây chúng ta xét một số trường hợp đặc biệt của bài toán này để làm thí dụ minh họa.

Bài toán tựa cân bằng vectơ dạng 1:

Cho $S : X \to 2^Y$, $G : X \times X \to 2^Y$ là các hàm đa trị, và $C \subseteq Y$ là tập hợp đóng với phần trong khác rỗng. Ta xét các bài toán sau:

(QEP^1): Tìm $\bar{x} \in \mathrm{cl}\, S(\bar{x})$ sao cho,

$$G(\bar{x}, y) \cap (Y \setminus -\mathrm{int}\, C) \neq \varnothing, \text{ với mọi } y \in S(\bar{x}).$$

$(SQEP^1)$: Tìm $\bar{x} \in \mathrm{cl}\, S(\bar{x})$ sao cho,

$$G(\bar{x}, y) \subseteq (Y \setminus -\mathrm{int}\, C), \text{ với mọi } y \in S(\bar{x}).$$

Bài toán cân bằng dạng 2:

---

[1] Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

[2] Tổ Toán, Trường Chuyên Lý Tự Trọng, TPCT

Cho $S: A \to 2^A, \Gamma: A \to 2^Y$ là các hàm đa trị, $f: A \times A \to Y$ là ánh xạ đơn trị. Giả sử rằng các giá trị của Γ là đóng với phần trong khác rỗng và khác với Y. Xét bài toán cân bằng:

(QEP^2): Tìm $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$ sao cho,

$$f(\bar{x}, y) \in \Gamma(\bar{x}), \text{ với mọi } y \in S(\bar{x}).$$

Bài toán bao hàm tựa biến phân:

Cho $P, Q: X \times X \to 2^X$ là các hàm đa trị. Bài toán bao hàm tựa biến phân được xét trong Hai và Khanh (2007) có dạng:

$(QVIP^1)$: Tìm $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$ sao cho,

$$P(\bar{x}, y) \subseteq Q(\bar{x}, y), \text{ với mọi } y \in S_2(\bar{x}).$$

Bài toán quan hệ biến phân:

Cho $R(x, y)$ là hệ thức liên kết giữa $x, y \in X$, ta thấy rằng R có thể đồng nhất với tập hợp con $M = \{(x, y) \in X \times X : R(x, y)$ được thỏa mãn$\}$ của không gian tích $X \times X$.

$(QVRP)$: Tìm $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$ sao cho,

$$R(\bar{x}, y) \text{ thỏa mãn, với mọi } y \in S_2(\bar{x}).$$

Bây giờ ta chỉ ra rằng, với việc xây dựng hàm mục tiêu thích hợp, các bài toán trên trở thành các trường hợp đặc biệt của bài toán $(QVIP)$.

- Để chuyển (QEP^1) về một trường hợp đặc biệt của $(QVIP)$, ta đặt $S_1(x) = \operatorname{cl} S(x), S_2(x) = S(x)$ và $F(x, y) = G(x, y) - (Y \setminus -\operatorname{int} C)$. Khi đó: $0 \in F(x, y) \Leftrightarrow G(x, y) \bigcap (Y \setminus -\operatorname{int} C) \neq \emptyset$.
- Bài toán $(SQEP^1)$ cũng là một trường hợp đặc biệt của $(QVIP)$ với, $S_1(x) = \operatorname{cl} S(x), S_2(x) = S(x)$ và $F(x, y) = Y \setminus (G(x, y) + \operatorname{int} C)$. Khi đó: $0 \in F(x, y) \Leftrightarrow G(x, y) \subseteq (Y \setminus -\operatorname{int} C)$.
- Tương tự, đối với bài toán (QEP^2), ta đặt $S_1(x) \equiv S_2(x) \equiv S(x)$, và $F(x, y) = f(x, y) - \Gamma(x)$. Khi đó: $0 \in F(x, y) \Leftrightarrow f(x, y) \in \Gamma(x)$.
- Để chuyển bài toán $(QVRP)$ về trường hợp đặc biệt của bài toán $(QVIP)$, ta đặt $Y = X \times X$ và $F(x, y) = (x, y) - M$. Khi đó: $R(x, y)$ thỏa mãn khi và chỉ khi $0 \in F(x, y)$.
- Trước hết ta thấy rằng $(QVIP)$ là một trường hợp đặc biệt của $(QVIP^1)$, với $F(x, y) \equiv Q(x, y)$ và $P(x, y) \equiv 0$. Tuy nhiên, với việc xác định quan hệ $R(x, y)$ thỏa mãn khi và chỉ khi $P(x, y) \subseteq Q(x, y)$, thì bài toán $(QVIP^1)$ lại là trường hợp riêng của bài toán $(QVIP)$.

Định nghĩa 1.1 (Fan, 1961) Hàm đa trị H của tập con A của không gian vectơ tôpô X vào X được gọi là ánh xạ KKM trong A, nếu với mỗi $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq A$ ta có:

$$\operatorname{conv}\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} H(x_i), \text{ ở đây } \operatorname{conv}\{\cdot\} \text{ là kí hiệu bao lồi của tập "}\cdot\text{"}.$$

Định lý 1.1 (Fan, 1961) *Giả sử X là không gian vectơ tôpô. $A \subseteq X$ là tập lồi khác rỗng và $H: A \to 2^X$ là một ánh xạ KKM với giá trị đóng. Nếu A là compact thì $\bigcap_{x \in A} H(x) \neq \emptyset$.*

Định lý 1.2 (Yannelis, 1983) *Cho A là tập hợp con compact, lồi khác rỗng của không gian vectơ thực Hausdorff, và $P: A \to 2^A$ là hàm đa trị thỏa mãn điều kiện $x \notin conv\, P(x)$, với mọi $x \in A$. Nếu với mọi $y \in A, P^{-1}(y) = \{x \in A : y \in P(x)\}$ là tập hợp mở trong A, thì tồn tại $x^* \in A$ sao cho $P(x^*) = \emptyset$.*

Định lý 1.3 (Park, 1992) *Cho X là không gian vectơ tôpô Hausdorff thực, $A \subseteq X$ là tập hợp con lồi khác rỗng và $D \subseteq A$ là tập hợp compact khác rỗng, cho S: $A \to 2^A$, L: $A \to 2^A$ là các hàm đa trị. Giả sử rằng:*

(a) Với mọi $x \in A$, L(x) là lồi và $S(x) \subseteq L(x)$;

(b) với mọi $x \in D$, $S(x) \neq \emptyset$;

(c) với mọi $y \in A$ thì $S^{-1}(y)$ là mở trong A;

(d) với mỗi tập con hữu hạn N của A có một tập con compact, lồi L_N sao cho $N \subseteq L_N \subseteq A$ và với mọi $x \in L_N \setminus D$, $S(x) \cap L_N \neq \emptyset$.

Khi đó L có điểm bất động.

Nhận xét 1.1 Điều kiện bức (d) ở Định lý 1.3 có thể thay thế bởi giả thiết bức sau:

(d') *tồn tại một tập compact lồi $K \subseteq A$ sao cho, với mọi $x \in A \setminus D$, tồn tại $y \in K$, để $x \in S^{-1}(y)$.*

Thật vậy, giả sử có (d') và đặt $N \subseteq A$ là hữu hạn. Đặt $L_N = \text{conv}(K \cup N)$, thì với mọi $x \in L_N \setminus D$, tồn tại $y \in K \subseteq L_N$, với $x \in S^{-1}(y)$. Vì thế, $y \in S(x) \cap K \subseteq S(x) \cap L_N$, có nghĩa là (d) được thỏa mãn.

2 SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BAO HÀM TỰA BIẾN PHÂN

Định lý 2.1 *Xét bài toán (QVIP) giả sử các điều sau được nghiệm đúng:*

(i) Với mọi tập con hữu hạn $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và với mọi $x \in conv\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ tồn tại $j \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $0 \in F(x, x_j)$;

(ii) S_1 là ánh xạ đóng, $conv\, S_2(x) \subseteq S_1(x)$ và $S_2^{-1}(y)$ là mở trong A, với mọi $x, y \in A$;

(iii) với mỗi $y \in A$ tập hợp $\{x \in A : 0 \in F(x, y)\}$ là tập đóng trong A;

(iv) A là tập compact.

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$ sao cho $0 \in F(\bar{x}, y)$, với mọi $y \in S_2(\bar{x})$.

Chứng minh.

Với $x, y \in A$, đặt:

$$E = \{x \in A : x \in S_1(x)\}, \qquad P(x) = \{y \in A : 0 \notin F(x, y)\},$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} S_2(x) \cap P(x) & \text{nếu } x \in E, \\ S_2(x) & \text{nếu } x \in A \setminus E, \end{cases}$$

$$Q(y) = A \setminus \Phi^{-1}(y).$$

Ta chứng minh Q là ánh xạ KKM trong A. Thật vậy, giả sử có tổ hợp lồi $\hat{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j$ trong A sao cho $\hat{x} \notin \bigcup_{j=1}^{n} Q(y_j)$, nghĩa là $\hat{x} \in \Phi^{-1}(y_j)$ hay $y_j \in \Phi(\hat{x})$ với mọi j = 1, …, *n*.

∗ Nếu $\hat{x} \in E$ ta có $y_j \in P(\hat{x})$, nghĩa là $0 \notin F(\hat{x}, y_j)$, với mọi j = 1, …, *n,* điều nầy mâu thuẫn với (i).

∗ Nếu $\hat{x} \in A \setminus E$ thì $y_j \in \Phi(\hat{x}) = S_2(x), j = 1,...,n$. Vậy $y_j \in \operatorname{conv} S_2(x)$, suy ra $\hat{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \in \operatorname{conv} S_2(\hat{x}) \subseteq S_1(\hat{x})$, mâu thuẫn. Do đó Q là ánh xạ KKM trong A.

Kế tiếp ta chứng minh tính đóng của $Q(y)$. Với mọi $y \in A$ ta có,

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(y) &= \left[E \cap S_2^{-1}(y) \cap P^{-1}(y)\right] \cup \left[(A \setminus E) \cap S_2^{-1}(y)\right] \\ &= \left[(A \setminus E) \cup P^{-1}(y)\right] \cap S_2^{-1}(y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(y) &= A \setminus \left\{\left[(A \setminus E) \cup P^{-1}(y)\right] \cap S_2^{-1}(y)\right\} \\ &= \left\{A \setminus \left[(A \setminus E) \cup P^{-1}(y)\right]\right\} \cup \left(A \setminus S_2^{-1}(y)\right) \\ &= \left[E \cap \left(A \setminus P^{-1}(y)\right)\right] \cup \left(A \setminus S_2^{-1}(y)\right).\end{aligned}$$

Vì S_1 đóng nên E đóng. Mặt khác,

$$\begin{aligned}A \setminus P^{-1}(y) &= \{x \in A : y \notin P(x)\} \\ &= \{x \in A : 0 \in F(x, y)\}\end{aligned}$$

là tập đóng. Từ đó ta suy ra $Q(y)$ là đóng. Áp dụng Định lý 1.1 ta có một điểm $\bar{x}$ sao cho

$$\bar{x} \in \bigcap_{y \in A} Q(y) = A \setminus \bigcup_{y \in A} \Phi^{-1}(y).$$

Vì thế, $\bar{x} \notin \Phi^{-1}(y)$, với mọi $y \in A$, nghĩa là $\Phi(\bar{x}) = \emptyset$.

∗ Nếu $\bar{x} \in A \setminus E$ thì $\Phi(\bar{x}) = S_2(\bar{x}) = \emptyset$, mâu thuẫn.

∗ Nếu $\bar{x} \in E$, ta có $\emptyset = \Phi(\bar{x}) = S_2(x) \cap P(\bar{x})$. Như thế, với mọi $y \in S_2(\bar{x}), y \notin P(\bar{x})$, tức là $0 \in F(\bar{x}, y)$, với mọi $y \in S_2(\bar{x})$. Điều này có nghĩa là, tồn tại $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$ sao cho $0 \in F(\bar{x}, y)$, với mọi $y \in S_2(\bar{x})$.

Thông thường sự tồn tại nghiệm của bài toán luôn liên quan đến tính chất liên tục của hàm mục tiêu, do đó giả thiết (iii) trong Định lý 2.1, yếu hơn tính chất liên tục, và như vậy sự xuất hiện của giả thiết này trong định lý là điều tất yếu. Tuy nhiên, các giả thiết còn lại có vẻ không liên quan đến tính liên tục, các thí dụ sau đây chỉ ra rằng các giả thiết trên là cốt yếu.

Thí dụ 2.1 Cho $X = Y = \mathbb{R}, A = [0, +\infty), S_1(x) \equiv S_2(x) \equiv A, F(x, y) = [y - x, +\infty).$

Ta thấy các giả thiết của Định lý 2.1 đều được thỏa mãn, trừ tính compact của A. Nếu bài toán tồn tại nghiệm thì tồn tại $\bar{x} \in A$ sao cho $0 \in F(\bar{x}, y)$ với mọi $y \in A$ nghĩa là $y \le \bar{x}$, với mọi $y \in A$, điều này không thể xảy ra. Do đó bài toán vô nghiệm, lý do là (iii) bị vi phạm.

Thí dụ 2.2 Cho $X = Y = \mathbb{R}, A = [0, \frac{3\pi}{2}], S_1(x) \equiv S_2(x) \equiv A, F(x, y) = [\sin(x - y), 1].$

Khi đó, các giả thiết của Định lý 2.1 được thỏa mãn trừ (i).

Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta thấy rằng, với mọi $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, tồn tại $y \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ để $\sin(x-y) > 0.$ Do đó bài toán (*QVIP*) vô nghiệm. Lý do là giả thiết (i) không nghiệm đúng. Thật vậy,

Với $x_1 = 0, x_2 = \frac{3\pi}{2}$ ta có $\mathrm{conv}\{x_1, x_2\} = [0, \frac{3\pi}{2}]$, lấy $x = \frac{4\pi}{3} \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, $x_1 - x = -\frac{4\pi}{3} \Rightarrow$ $\sin(x_1 - x) > 0, x_2 - x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin(x_2 - x) > 0.$ Do đó (i) là cốt yếu.

Thí dụ 2.3 Cho $X = Y = \mathbb{R}, A = [0,2], S_1(x) \equiv [1,2], S_2(x) \equiv [0,2], F(x,y) = [x-y,3].$

Ta thấy các giả thiết của Định lý 2.1 đều được thỏa mãn, trừ tính chất (ii). Dễ thấy bài toán là vô nghiệm. Do đó (ii) là không bỏ được.

Hệ quả 2.2 *Khẳng định của Định lý 2.1 vẫn đúng khi điều kiện (iii) được thay bởi điều kiện sau:*

(iii') Với mỗi $y \in A$: $x \mapsto F(x, y)$ là đóng trong A.

Chứng minh.

Ta chứng minh rằng từ giả thiết (iii') suy ra giả thiết (iii). Thật vậy, với mỗi $y \in A$, đặt $B = \{x \in A : 0 \in F(x,y)\}$. Ta cần chứng minh tập hợp B là đóng. Lấy $x_\alpha \in B, x_\alpha \to x$, do A đóng nên $x \in A.$ Vì $x_\alpha \in B$ nên $0 \in F(x_\alpha, y),$ với mọi $\alpha.$ Do $F(.,y)$ đóng nên $0 \in F(x,y),$ nghĩa là $x \in B.$ Vậy B là tập hợp đóng.

Định lý 2.3 *Định lý 2.1 vẫn đúng nếu ta thay giả thiết (i) bằng giả thiết sau:*

(i') Với mọi $x \in A$ tập hợp $\{y \in A: 0 \notin F(x,y)\}$ là lồi và $0 \in F(x, x)$.

Chứng minh.

Đặt:

$$E = \{x \in A : x \in S_1(x)\},$$

$$P(x) = \left\{y \in A : 0 \notin F(x,y)\right\},$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} S_2(x) \cap P(x) & \text{nếu } x \in E, \\ S_2(x) & \text{nếu } x \in A \setminus E. \end{cases}$$

Do giả thiết (i'), $P(x)$ là lồi với mọi $x \in A,$ hơn nữa với mọi $x \in A, x \notin \mathrm{conv}\, P(x).$ Thật vậy, do $\mathrm{conv}\, P(x) = P(x)$ nên nếu có $x \in \mathrm{conv}\, P(x),$ thì ta suy ra $x \in P(x).$ Khi đó $0 \notin F(x,x)$ trái với giả thiết (i').

Kế tiếp ta chứng minh rằng $x \notin \mathrm{conv}\,\Phi(x)$. Thật vậy,

+ Nếu $x \in E$ thì $\Phi(x) \subseteq P(x)$, nên $\mathrm{conv}\,\Phi(x) \subseteq P(x)$ vì $x \notin P(x)$ suy ra $x \notin \mathrm{conv}\,\Phi(x);$

+ Nếu $x \in A \setminus E$ thì $\Phi(x) = S_2(x)$. Do đó $\mathrm{conv}\,\Phi(x) = \mathrm{conv}\, S_2(x) \subseteq S_1(x).$ Như vậy, nếu $x \in \mathrm{conv}\,\Phi(x)$ dẫn đến $x \in S_1(x)$, suy ra $x \in E,$ mâu thuẫn với việc $x \in A \setminus E.$

Mặt khác, với mọi $y \in A,$

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(y) &= \left[E \cap S_2^{-1}(y) \cap P^{-1}(y)\right] \cup \left[(A \setminus E) \cap S_2^{-1}(y)\right] \\ &= \left[(A \setminus E) \cup P^{-1}(y)\right] \cap S_2^{-1}(y).\end{aligned}$$

Do S_1 là ánh xạ đóng nên E là tập hợp đóng, tức là $A \setminus E$ là tập hợp mở. Theo các giả thiết (ii), (iii), $S_2^{-1}(y)$ và $P^{-1}(y) = \{x \in A : y \in P(x)\} = \{x \in A : 0 \notin F(x, y)\}$ là các tập hợp mở. Từ đó ta suy ra $\Phi^{-1}(y)$ là tập hợp mở.

Áp dụng Định lý 1.2, tồn tại $\bar{x} \in A$ sao cho $\Phi(\bar{x}) = \varnothing$.

Nếu $\bar{x} \in A \setminus E$ thì $\Phi(\bar{x}) = S_2(\bar{x}) \neq \varnothing$, vô lý. Vậy $\bar{x} \in E$. Tức là ta có,

$$\Phi(\bar{x}) = S_2(\bar{x}) \cap P(\bar{x}) = \varnothing.$$

Do đó với mọi $y \in S_2(\bar{x}), y \notin P(\bar{x})$, nghĩa là $0 \in F(\bar{x}, y)$. Nói cách khác, tồn tại $\bar{x} \in S_1(\bar{x})$ sao cho, với mọi $y \in S_2(\bar{x}, y)$, $0 \in F(\bar{x}, y)$.

Định lý 2.4 *Định lý 2.3 vẫn đúng nếu ta thay giả thiết (iv) bằng giả thiết sau:*

(iv') Tồn tại một tập hợp con khác rỗng compact $D \subseteq A$ sao cho, với mỗi tập con hữu hạn N của A, tồn tại một tập compact*, lồi L_N với $N \subseteq L_N \subseteq A$, thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) Với mọi $x \in L_N \setminus D$, $S_2(x) \cap L_N \neq \varnothing$;

(2) với $x \in S_1(x) \cap (L_N \setminus D)$, tồn tại $y \in S_2(x) \cap L_N$ sao cho $0 \notin F(x, y)$.

Chứng minh.

Đặt:

$$E = \{x \in A : x \in S_1(x)\},$$

$$P(x) = \{y \in A : 0 \notin F(x, y)\},$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} S_2(x) \cap P(x) & \text{nếu } x \in E, \\ S_2(x) & \text{nếu } x \in A \setminus E, \end{cases}$$

$$Q(x) = \begin{cases} \left(\operatorname{conv} S_2(x)\right) \cap P(x) & \text{nếu } x \in E, \\ \operatorname{conv} S_2(x) & \text{nếu } x \in A \setminus E. \end{cases}$$

Áp dụng Định lý 1.3 với $L = Q$ và $S = \Phi$. Ta chứng tỏ rằng các giả thiết (a), (c), (d) của Định lý 1.3 được thỏa mãn, nhưng Q không có điểm bất động, và như thế giả thiết (b) phải bị vi phạm.

+ Ta có $Q(x)$ là lồi với mọi x, và $\Phi(x) \subseteq Q(x)$ bởi định nghĩa của Q, nên (a) được nghiệm đúng.

+ Với mọi $y \in A$, ta có:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(y) &= \left[E \cap S_2^{-1}(y) \cap P^{-1}(y)\right] \cup \left[(A \setminus E) \cap S_2^{-1}(y)\right] \\ &= \left[(A \setminus E) \cup P^{-1}(y)\right] \cap S_2^{-1}(y). \end{aligned}$$

Suy ra

$$A \setminus \Phi^{-1}(y) = [E \cap (A \setminus P^{-1}(y))] \cup (A \setminus S_2^{-1}(y)). \tag{2.1}$$

Ta sẽ chứng minh tập hợp này là đóng. Bằng tính đóng của S_1 trong giả thiết (ii), ta thấy E là đóng. Theo giả thiết (ii) ta suy ra $A \setminus S_2^{-1}(y)$ cũng là đóng. Phần còn lại trong (2.1) là:

$$A \setminus P^{-1}(y) = \{x \in A : y \notin P(x)\}$$

là đóng do (iii). Như thế $A \setminus \Phi_2^{-1}(y)$ là đóng, tức là (c) thỏa mãn.
+ Để kiểm tra giả thiết (d), ta xét D và L_N với mỗi N xác định bởi giả thiết (iv'). Lấy $x \in L_N \setminus D$ tùy ý. Nếu $x \in A \setminus E$ thì, $\Phi(x) \cap L_N = A \cap S_2(x) \cap L_N = S_2(x) \cap L_N \neq \emptyset$, do (iv'). Nếu $x \in E$ thì $x \in S_1(x) \cap (L_N \setminus D)$. Cũng theo giả thiết (iv') tồn tại $y \in S_2(x) \cap L_N$ sao cho $0 \notin F(x, y)$, nghĩa là $y \in P(x)$. Như thế $y \in S_2(x) \cap P(x) = \Phi(x)$ và $\Phi(x) \cap L_N \neq \emptyset$. Do dó (d) được nghiệm đúng.

Cuối cùng, giả sử rằng Q có điểm bất động $\bar{x} \in A$. Nghĩa là $\bar{x} \in Q(\bar{x})$.

Nếu $\bar{x} \in E$ thì $\bar{x} \in P(\bar{x})$, tức là $0 \notin F(\bar{x}, \bar{x})$, mâu thuẫn với (i).

Nếu $\bar{x} \in A \setminus E$ thì $\bar{x} \in \mathrm{conv}(S_2(\bar{x})) \subseteq S_1(\bar{x})$ có nghĩa là $\bar{x} \in E$, mâu thuẫn.

Từ những điều đã chứng minh, ta suy ra giả thiết (b) của Định lý 1.3 bị vi phạm, tức là tồn tại $\bar{x} \in D \subseteq A$ sao cho $\Phi(\bar{x}) = \emptyset$.

Nếu $\bar{x} \in A \setminus E$ thì $S_2(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) = \emptyset$ mâu thuẫn. Vì vậy $\bar{x} \in E$ và $\emptyset = \Phi(\bar{x}) = S_2(\bar{x}) \cap P(\bar{x})$, suy ra với mọi $y \in S_2(\bar{x}), y \notin P(\bar{x})$. Do đó, $0 \in F(\bar{x}, y)$, với mọi $y \in S_2(\bar{x})$.

3 MỘT SỐ ỨNG DỤNG

3.1 Bất đẳng thức Ky Fan

Cho X, A như ở phần mở đầu và $f : X \times X \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ đơn trị. Ta xét bất đẳng thức Ky Fan sau:
(KF): Tìm $\bar{x} \in A$ sao cho

$$f(\bar{x}, y) \leq 0, \text{ với mọi } y \in A.$$

Đinh nghĩa 3.1 Cho ánh xạ $h : X \to \mathbb{R}$, và $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Tập $\alpha-$mức trên của h, ký hiệu là $lev_{\geq\alpha}h$, được xác định bởi:

$$lev_{\geq\alpha}h = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\}.$$

(b) Tập $\alpha-$mức trên chặt của của h, ký hiệu là $lev_{>\alpha}h$, được xác định bởi:

$$lev_{>\alpha}h = \{x \in X : h(x) > \alpha\}.$$

(c) Tập $\alpha-$mức dưới của h, ký hiệu là $lev_{\leq\alpha}h$, được xác định bởi:

$$lev_{\leq\alpha}h = \{x \in X : h(x) \leq \alpha\}.$$

(d) Tập $\alpha-$mức dưới chặt của của h, ký hiệu là $lev_{<\alpha}h$, được xác định bởi:

$$lev_{<\alpha}h = \{x \in X : h(x) < \alpha\}.$$

Kết quả sau đây được suy ra từ Định lý 2.3.

Hệ quả 3.1 *Giả sử A là tập compact, và các giả thiết sau đây được thỏa mãn:*

(i) Với mỗi $x \in A, lev_{>0}f(x,.)$ lồi và $f(x, x) \leq 0$;

(ii) với mỗi $y \in A, lev_{\leq 0}f(., y)$ đóng.

Khi đó tồn tại $\bar{x} \in A$ để $f(\bar{x}, y) \leq 0$, với mọi $y \in A$.

Chứng minh.

Đặt $F(x, y) = [f(x, y), +\infty)$. Khi đó $0 \in F(x, y)$ khi và chỉ khi $f(x, y) \leq 0$.

Ta kiểm tra các giả thiết của Định lý 2.3 được thỏa mãn. Các giả thiết (ii) và (iii) hiển nhiên nghiệm đúng. Vì $lev_{>0}f(x,.)$ lồi nên $\{y \in A : 0 \notin F(x,y)\}$ lồi, và do $f(x,x) \le 0$ nên ta có $0 \in F(x,y)$. Do đó (i') thỏa mãn. Với (iii), vì $lev_{\le 0}f(.,y)$ đóng nên $\{x \in A : 0 \in F(x,y)\}$ là tập đóng. Áp dụng Định lý 2.3 ta suy ra tồn tại $\bar{x} \in A$ để $f(\bar{x},y) \le 0,$ với mọi $y \in A$.

Định nghĩa 3.2 Cho $h : X \to \mathbb{R}$.

(a) *h* được gọi là nửa liên tục trên (usc) tại x_0, nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 thì $h(x_0) \ge \limsup h(x_n)$.

(b) *h* được gọi là nửa liên tục dưới (lsc) tại x_0, nếu với mọi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 thì $h(x_0) \le \liminf h(x_n)$.

Định nghĩa 3.3 Cho $h : X \to \mathbb{R}$, và A là tập con khác rỗng của X.

(a) *h* được gọi là lồi trong A, nếu $\forall x_1, x_2 \in A, \forall t \in [0,1]$,

$$h(tx_1 + (1-t)x_2) \le th(x_1) + (1-t)h(x_2).$$

(b) *h* được gọi là tựa lồi trong A, nếu $\forall x_1, x_2 \in A, \forall t \in [0,1]$,

$$h(tx_1 + (1-t)x_2) \le \max\{h(x_1), h(x_2)\}.$$

Nhận xét 3.1

(i) Nếu $f(.,y)$ lsc thì $lev_{\le 0}f(.,y)$ đóng.

(ii) Nếu $f(x,.)$ tựa lồi thì $lev_{>0}f(x,.)$ lồi.

3.2 Bất đẳng thức biến phân

Cho X là không gian định chuẩn, và A là tập con lồi khác rỗng của X, và $B : X \to X^*$, trong đó X^* là không gian đối ngẫu của *X*. Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân sau:

(VI): Tìm $\bar{x} \in A$ sao cho,

$$\langle B(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \ge 0, \text{ với mọi } y \in A.$$

Kết quả sau đây được suy ra từ Hệ quả 3.1 và Nhận xét 3.1.

Hệ quả 3.2 *Giả sử A là tập compact và với mỗi $y \in A$ ánh xạ $x \mapsto \langle B(x), x - y \rangle$ nửa liên tục dưới trong A. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in A$ để $\langle B(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle \ge 0,$ với mọi $y \in A$.*

Chứng minh.

Đặt:

$$f(x,y) = \langle B(x), x - y \rangle.$$

Ta kiểm tra các giả thiết của Hệ quả 3.1 được thỏa mãn.

+ Ta chứng minh với mỗi $x \in A$, $lev_{>0}f(x,.) = \{y \in A : \langle B(x), x - y \rangle > 0\}$ là tập lồi.

Lấy $y_1, y_2 \in lev_{>0}f(x,.)$, tức là $\langle B(x), x - y_1 \rangle > 0, \langle B(x), x - y_2 \rangle > 0,$ và $y_t = ty_1 + (1-t)y_2$, với $t \in [0,1]$.

Ta có:

$$\begin{aligned} f(x,y_t) &= \langle B(x), x - (ty_1 + (1-t)y_2) \rangle \\ &= \langle B(x), tx + (1-t)x - (ty_1 + (1-t)y_2) \rangle \\ &= \langle B(x), t(x - y_1) \rangle + \langle B(x), (1-t)(x - y_2) \rangle \\ &= t\langle B(x), x - y_1 \rangle + (1-t)\langle B(x), x - y_2 \rangle > 0. \end{aligned}$$

Suy ra $y_t \in lev_{>0} f(x,.)$. Do đó $lev_{>0} f(x,.)$ là tập lồi.

+ Ta chứng minh với mỗi $y \in A$, $lev_{\leq 0} f(.,y)$ là tập đóng.

Lấy $x_n \in lev_{\leq 0} f(.,y), x_n \to x$, suy ra $\langle B(x_n), x_n - y\rangle \leq 0$. Do $x \mapsto \langle B(x), x - y\rangle$ lsc nên

$$\langle B(x), x - y\rangle \leq \liminf \langle B(x_n, x_n - y\rangle \leq 0.$$

Nghĩa là, $x \in lev_{\leq 0} f(.,y)$. Vậy $lev_{\leq 0} f(.,y)$ đóng. Mặt khác $f(x,x) = \langle B(x), 0\rangle = 0$. Do đó các giả thiết của Hệ quả 3.1 nghiệm đúng. Áp dụng Hệ quả 3.1, ta suy ra tồn tại $\bar{x} \in A$ để

$$\langle B(\bar{x}), y - \bar{x}\rangle \geq 0, \text{ với mọi } y \in A.$$

3.3 Bài toán tối ưu

Cho X, A như phần mở đầu, và ánh xạ $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Ta xét bài toán tối ưu sau:

(OP): Tìm $\min \varphi(x)$, với $x \in A$.

Định nghĩa 3.4 (Morgan và Scalzo, 2004, 2006) Cho X là không gian tôpô và $f : X \to \mathbb{R}$.

(a) f được gọi là tựa nửa liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu,

$$[f(x) > f(x_0)] \Rightarrow [\text{ với mọi } \{x_n\} \to x_0, f(x) > \limsup f(x_n)].$$

(b) f được gọi là tựa nửa liên tục dưới tại $x_0 \in X$ nếu,

$$[f(x) < f(x_0)] \Rightarrow [\text{ với mọi } \{x_n\} \to x_0, f(x) < \liminf f(x_n)].$$

(c) f được gọi là tựa liên tục tại $x_0 \in X$, nếu f là tựa nửa liên tục trên và tựa nửa liên tục dưới tại x_0.

Thí dụ sau đây cho thấy khái niệm trên là giảm nhẹ thật sự của khái niệm nửa liên tục của ánh xạ đơn trị.

Thí dụ 3.1 Xét $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{nếu } x > 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \\ x - 2 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Khi đó f là tựa liên tục tại 0, nhưng không nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại 0.

Kết quả sau đây được suy ra từ Hệ quả 3.1.

Hệ quả 3.3 *Giả sử A là tập compact và các giả thiết sau đây nghiệm đúng:*

(i) φ là hàm tựa lồi trong A;

(ii) φ là tựa nửa liên tục dưới trong A.

Khi đó bài toán (OP) có nghiệm trong A.

Chứng minh.

Với mỗi $x, y \in A$, đặt

$$f(x,y) = \varphi(x) - \varphi(y).$$

Ta kiểm tra các giả thiết của Hệ quả 3.1 nghiệm đúng trong trường hợp này.

+ Với mỗi $x \in A$, xét

$$lev_{>0} f(x,.) = \{y \in A : \varphi(x) - \varphi(y) > 0\}.$$

Giả sử $y_1, y_2 \in lev_{>0} f(x,.)$, và $t \in [0,1]$, ta có

$$\varphi(x) - \varphi(ty_1 + (1-t)y_2) \geq \varphi(x) - \max\{\varphi(y_1), \varphi(y_2)\} > 0,$$

vì $y_1, y_2 \in lev_{>0} f(x,.)$. Từ đó suy ra $y_t = ty_1 + (1-t)y_2 \in lev_{>0} f(x,.)$. Do đó $lev_{>0} f(x,.)$ là tập lồi.

+ Với mỗi $y \in A$, ta sẽ chỉ ra rằng $lev_{\leq 0} f(.,y) = \{x \in A : \varphi(x) - \varphi(y) \leq 0\}$ là tập đóng. Lấy $x_n \in lev_{\leq 0} f(.,y), x_n \to x$. Ta cần chứng minh $x \in lev_{\leq 0} f(.,y)$. Giả sử ngược lại, $x \notin lev_{\leq 0} f(.,y)$, tức là

$$\varphi(y) < \varphi(x) \tag{3.1}$$

Theo tính tựa nửa liên tục dưới của φ, từ (3.1) ta suy ra

$$\varphi(y) < \liminf \varphi(x_n). \tag{3.2}$$

Mặt khác, vì $x_n \in lev_{\leq 0} f(.,y)$, nên ta có

$$\varphi(y) \geq \varphi(x_n).$$

Điều này mâu thuẫn với (3.2). Do đó $x \in lev_{\leq 0} f(.,y)$.

Áp dụng Hệ quả 3.1, ta suy ra tồn tại $\overline{x} \in A$ để,

$$f(\overline{x}, y) = \varphi(\overline{x}) - \varphi(y) \leq 0, \text{ với mọi } y \in A.$$

Nói cách khác, $\overline{x} \in A$ là nghiệm của bài toán (OP).

4 KẾT LUẬN

Chúng tôi đã sử dụng các định lý về điểm bất động dạng KKM-Fan, định lý về phần tử tối đại, để thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bài toán bao hàm tựa biến phân. Do bài toán bao hàm tựa biến phân chứa nhiều bài toán quan trọng khác trong lý thuyết tối ưu, nên các kết quả thu được trong Mục 2 có thể suy ra các kết quả tương ứng cho các trường hợp đặc biệt của nó; trong bài báo này chúng tôi áp dụng cho bài toán bất đẳng thức Ky Fan, bất đẳng thức biến phân và bài toán tối ưu để làm thí dụ minh họa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Fan, K., 1961. A generalization of Tychonoff's fixed point theroem. *Math. Ann.* 142:305-310.

Hai, N.X. and Khanh, P.Q., 2007. The solution existence of general variational inclusion problems. *Journal of mathematical Analysis and Application*, 328: 1268-1277.

Morgan, J. and Scalzo, V., 2006. Discontinuous but well-posed optimization problems. *SIAM J. Optim.* 17: 861-870.

Morgan, J. and Scalzo, V., 2004. Pseudocontinuity in optimization and nozero sum games. *J. Optim. Theory Appl.* 120: 181-197.

Park,S., 1992. Some coincidence, theorem on acyclic multifunctions and applications to KKM theory, fixed-point theory and application, Edied by K.K. Tan. *Word Scientific, River Edge, New Jersey,* 248-277.

Yannelis, Nicholas C.and Prabhakar, N.D. , 1983. Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces. *Journal of Mathematical Economics* 12: 233-245. *North-Holland*.